Prueba 3

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

1) [**35 ptos.**] Sea $f(x) = x^2 \ln(x+1)$

a) (**10 ptos.**) A partir de la serie de la función $\dfrac{1}{1-x}$, demostrar que la serie de Maclaurin de f es $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+3}}{n+1}$

b) (**5 ptos.**) Usando el item anterior, deducir una representación en serie para $f'(x)$.

c) (**10 ptos.**) Calcular el valor exacto de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)}{(n+1)2^{n+2}}$ (observe la serie encontrada en el punto anterior).

d) (**10 ptos.**) Usando series, estimar el valor de la integral definida $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ con una exactitud tal que $|\text{error}| < 0.001$.

2) [**25 ptos.**] Determinar el radio y el dominio de convergencia para la siguiente serie de potencias:

$$S(X) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}(x-2)^n$$

PAUTA

1) a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-(-x)} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \text{(2 pts.)}\\
\int \frac{dx}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\\
\ln(1+x)+C &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{(4 pts.)}
\end{aligned}$$

Reemplazando $x = 0$ en lo anterior, notamos que $C = 0$, luego $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (2 pts.). Multiplicando lo anterior por x^2, concluimos que

$$x^2\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+3}}{n+1} \qquad \text{(2 pts.)}$$

b) Derivando lo anterior, tenemos inmediatamente que

$$f'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+3)x^{n+2}}{n+1} \qquad \text{(5 pts.)}$$

c) Reemplazando $x = -1/2$ en la serie del punto anterior se tiene que

$$1/2 - \ln(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)}{(n+1)2^{n+2}} \qquad \text{(10 pts.)}$$

d) Tenemos que

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^{1/2} x^{n+3}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)2^{n+4}} \qquad \text{(4 pts.)}$$

No es difícil ver que $|R_k| < \frac{1}{(k+2)(k+5)2^{k+5}} < 0.001$ si $k = 1$ (por ejemplo) (3 pts.). Luego, la aproximación que nos piden es

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = S_1 = \frac{1}{64} - \frac{1}{18\cdot 64} = \frac{17}{1152} \qquad \text{(3 pts.)}$$

2) Por el criterio del cuociente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln(n+1)(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\ln(n)(x-2)^n}\right| = |x-2| \qquad \text{(7 pts.)}$$

Luego, la serie converge si $|x-2|<1$, es decir, para $1<x<3$ (2 pts.). El radio de convergencia es $R=1$ (1 pts.). Ahora, estudiemos qué ocurre en los extremos del intervalo de convergencia.

Si $x=3$ nos queda la serie $S(3)=\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$ la cual puede ser estudiada por el criterio de la integral dado que $\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ es continua, positiva y decreciente para $x\geq 3$. En efecto, note que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}<0 \iff \frac{1}{2}<\ln(x)$$

lo cual es cierto para $x\geq 3$ (3 pts.). Ahora

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,dx &= -\frac{\ln(x)}{x}\bigg|_3^{\infty}+\int_3^{\infty}x^{-2}\,dx\\ &= \lim_{k\to\infty}-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+\frac{\ln(3)}{3}+\frac{1}{3}\\ &= \frac{\ln(3)}{3}+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

es decir, la integral es convergente, lo cual implica que $S(3)$ también lo es (5 pts.).

Si $x=1$ nos queda la serie $S(1)=\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n^2}$. Como esta serie absolutamente convergente (note que nos queda la serie $S(3)$, la cual es convergente), entonces $S(1)$ también converge (5 pts.).

<u>Otra forma</u> es usar el criterio de series alternadas. Sabemos que $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ es decreciente (lo mostramos anteriormente). Además, note que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}\overset{L'H}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}=0$$

Por criterio de series alternadas, la serie $S(1)$ converge (5 pts.).

Finalmente, tenemos que $Dom(S)=[1,3]$ (2 pts.).